Анализ методов решения задач оптимального управления

Г. Р. Шангареева, И. В. Григорьев*, С. А. Мустафина

Башкирский государственный университет, Стерлитамакский филиал
Россия, Республика Башкортостан, г. Стерлитамак, 453103, проспект Ленина, 37.

**Email: grigoryevgiv@gmail.com*

В работе разработаны пошаговые алгоритмы решения задач оптимального управления, основанные на методе последовательных приближений и методе вариаций в пространстве управлений. Проведено численное исследование и сравнительный анализ разработанных алгоритмов при различной величине точности.

Ключевые слова: метод последовательных приближений, метод вариаций, оптимальное управление, численный алгоритм.

Математическая теория оптимального управления изучает явления, процессы и системы, на которые можно воздействовать. Основная цель теории – создать методы и способы выбора управляющего воздействия для получения наилучшего результата. На данный момент не разработано единого универсального метода решения этой задачи, что в основном объясняется трудностью решения задач оптимального управления.

Данная работа посвящена разработке эффективных и универсальных алгоритмов численного решения задач оптимизации.

Пусть состояние физического процесса или объекта характеризуется переменными состояния (фазовыми координатами) $x_1(t), x_2(t), \ldots x_n(t)$. Физический процесс или динамика объекта описывается системой дифференциальных уравнений (уравнениями состояния):

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1, x_2, \ldots x_n, u), \quad i = 1, \ldots, n, \qquad (1)$$

где $u = u(t)$ – функция, характеризующая управляющее воздействие, t – время.

Задача оптимального управления заключается в определении функции управления $u = u(t)$ в интервале $t_0 \le t \le T,$ которая обеспечивает экстремум (максимум и минимум) критерия качества, заданного в виде функционала:

$$I = \int_{t_0}^{T_1} f^0(t, x(t), u(t))dt + F(T, x(T)), \qquad (2)$$

и удовлетворяет ограничению:

$\varphi(u) \le 0,$ (3)

где $f^0(x,t,u),\ F(T,x)$ – заданные непрерывно дифференцируемые функции. В качестве критериев качества могут приниматься энергетические затраты, время достижения цели, ошибка управления, стоимость, минимальный расход продукта и т.п.

Решение задачи оптимального управления требует задания начальных $x_i(t_0)$ и конечных состояний $x_i(T)$, $i = 1,\dots,n.$

Оптимальное управление $u = u(t)$ определяет оптимальную траекторию $x_i = x_i(t)$ в n-мерном фазовом пространстве, движение по которой из начального состояния обеспечивает достижение оптимального значения функционала (критерия качества)[1].

Рассмотрим различные алгоритмы для решения задач оптимального управления.

Алгоритм метода последовательных приближений.

Задача оптимального управления (1) – (3) с помощью принципа максимума [2] может быть сведена к решению краевой задачи системы дифференциальных уравнений 2n-го порядка.

Введем $n-$мерный вектор $\psi = (\psi_1,\dots,\psi_n)$ сопряженных переменных и функцию Гамильтона:

$$H(t,x,\psi,u) = \psi^T f(t,x,u). \quad (4)$$

Запишем сопряженную систему:

$$\frac{d\psi_i}{dt} = -\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f_j(t,x(t),u(t))}{\partial x_i}\psi_j, \quad i = 1,\dots,n \quad (5)$$

с граничными условиями:

$$\psi(T) = -\frac{\partial F(x(T))}{\partial x}. \quad (6)$$

Согласно принципу максимума искомое оптимальное управление доставляет функции $H(t,x,\psi,u)$ максимум по $u \in U$ при любом $t \in [t_0, T]$, если $x(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют системе (1) и граничным условиям (6).

Одним из наиболее распространенных методов решения указанной краевой задачи является метод последовательных приближений в пространстве управлений [3].

Задаем начальное приближение управления $u^0(t)$, $(t_0 \le t \le T)$ и полагаем счетчик числа итераций равным 0.

Метод итерационный и k итерация заключается в следующем:

1. Интегрируем управляемую систему с управлением $u = u^k(t)$ до момента $t = T$. При этом определяется траектория $x^k(t)$ и граничные условия для сопряженной системы.
2. Интегрируем сопряженную систему от момента $t = T$ до $t = t_0$ при $u = u^k(t)$, $x = x^k(t)$ – определяем сопряженные переменные $\psi^k(t)$ на интервале $[t_0, T]$.
3. Определяем новое приближение $u^{k+1}(t)$ на интервале $[t_0, T]$ из максимума функции $H(t, x, \psi, u)$:
4. $$H\left(t, x^k(t), \psi^k(t), u^{k+1}(t)\right) = \max_{u \in U} H\left(t, x^k(t), \psi^k(t), u(t)\right). \qquad (7)$$
5. Если условие (7) определяет $u^{k+1}(t)$ неединственным образом, то выбираем любое из возможных значений. После этого переходим к следующей итерации и т. д.

Если процесс последовательных приближений сходится, то продолжаем его до тех пор, пока последующие приближения не будут отличаться друг от друга в пределах заданной точности. Полученное после сходимости решение будет удовлетворять принципу максимума. Следует также отметить, что сходимость итерационного процесса существенно зависит от выбора первого приближения.

Алгоритм метода вариаций.

Метод вариаций по своей сути является методом перебора вариантов в фазовом пространстве, каждый раз определяем минимум функционала качества.

Метод вариаций в пространстве управлений состоит в следующем. Производится вариация траектории в дискретных точках, отстоящих на время dt, по каждой из компонент вектора x, причем при варьировании $k-$ой точки все остальные считаются фиксированными. Если значение критерия качества уменьшилось, то движение продолжается в этом направлении. Метод вариаций в пространстве управлений представляет сочетание дискретизации задачи с методом покоординатного спуска.

Положим, что известно некоторое управление $u(t) \in U$, которое будем называть невозмущенным управлением.

В методе вариаций на каждой итерации вариация δu управления $u(t)$ определяется путем минимизации линейной части приращения функционала $I(u)$, вызванного этой вариацией:

$$\min_{\delta u \in \delta U} \delta I(du) = \min_{\delta u \in \delta U} \int_0^T W_0^T(t)\delta u(t)$$
.

Здесь δU – некоторая малая окрестность невозмущенного управления $u(t)$.

Общая схема метода вариаций в пространстве управлений:

1. Полагаем счетчик числа итераций k равным нулю и задаем начальное приближение к оптимальному управлению $u^k(t) \in U$.
2. Решаем задачу Коши для системы дифференциальных уравнений (1) с управлением, полученным на предыдущем шаге – получаем фазовую траекторию $x^k(t)$.
3. Вычисляем $I^k(u)$ – значение функционала качества (3) на невозмущенной траектории $u^k(t)$. Запоминаем значение критерия и управление в достаточном числе точек.
4. В окрестности невозмущенной траектории $u^k(t)$ выполняем линеаризацию задачи – вычисляем функциональную производную $W_0^k(t) = \dfrac{\partial I^k(u)}{\partial u}$ и определяем окрестность δU^k невозмущенной траектории.
5. Из условия
6. $$\min_{\delta u \in \delta U^k} \delta I^k(du) = \min_{\delta u \in \delta U^k} \int_0^T \left(W_0^T(t)\right)^T \delta u(t)dt,$$
7. находим приращение δu^k управления $u^k(t)$
8. Полагаем $u^{k+1}(t) = u^k(t) + \delta u^k$.
9. Повторяем цикл с п.2 до тех пор, пока не выполнится условие $\delta u^k < \varepsilon$.

Вычислительный эксперимент.

На основе созданных алгоритмов реализован программный комплекс в среде программирования Delphi, который включает возможности остановки процесса [4]-[5]. При этом погрешности будут рассчитываться по евклидовой норме.

Тестовый пример. Пусть управляемый процесс описывается системой дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = x_2(t), \\ \dot{x}_2(t) = -x_1(t) + u(t) \end{cases} \quad (8)$$

с начальными условиями:

$$x_1(0) = 0,\ x_2(0) = 0 \quad (9)$$

и следующими ограничениями на переменную времени:

$$0 \le t \le 2\pi \quad (10)$$

и на управление:

$$|u| \le 1. \quad (11)$$

Критерий оптимизации имеет вид

$$I = x_2(2\pi) \to \min. \quad (12)$$

Требуется найти оптимальное управление $u^*(t)$ и соответствующую ему траекторию $x^*(t)$, которые удовлетворяют уравнениям (8)–(9), ограничениям (10)–(11) и условию (12).

Результат аналитического решения задачи представлен в работе [6]. В таблице 1 представлен сравнительный анализ результатов численного решения задачи (8)–(12) методом вариации и методом последовательных приближений при различных значениях начального приближения, точности вычислений.

Полученные результаты показывают удовлетворительное согласование с аналитическим решением.

Таблица 1. Сравнительный анализ результатов решения задачи при точности вычислений 10-3

	Начальное приближение u_0	Скорость вычислений, с	Погрешность			Значение функционала I_{min}
			ε_u	ε_{x_1}	ε_{x_2}	
Метод вариаций	0.9	3.84	2.962	0.016	0.017	-3.996
Метод последовательных приближений	0.9	0.54	0.998	1.419	1.419	-3.783

Литература

1. Григорьев И. В., Михайлова Т. А., Мустафина С. А. О численном алгоритме метода вариаций в пространстве управлений // Фундаментальные исследования. 2015. №5–2. С. 279–283.

2. Григорьев И. В., Мустафина С. А. Реализация численного алгоритма метода вариаций в пространстве управлений // Молодой ученый. 2015. №9 (89). С. 110–115.
3. Григорьев И. В., Мустафина С. А. Нахождение оптимального программного управления методом итераций // Путь науки. 2015. №5 (15). С. 10–13.
4. Михайлова Т. А., Григорьев И. В., Мустафина С. А. Исследование синтеза бутадиен-стирольного сополимера на основе метода монте-карло с учетом распределения по времени пребывания // Фундаментальные исследования. 2015. №5–3. С. 517–520.
5. Григорьев И. В., Мустафина С. А. Реализация численного алгоритма решения задач оптимального управления с фазовыми ограничениями //Аспирант. 2015. №5–1 (10). С. 49–51.
6. Шангареева Г. Р., Мустафина С. А. Метод последовательных приближений для решений задач оптимального управления // Проблемы теории и практики современной науки. Материалы Международной (заочной) научно-практической конференции. РИО ООО «Наука и образование». Нефтекамск, 2015. С. 138–140.

Статья рекомендована к печати кафедрой математического моделирования БашГУ (д.ф.-м.н, проф. С. А. Мустафина).

Analysis of methods for solving optimal control problems

G. R. Shangareeva, I. V. Grigoryev*, S. A. Mustafina

Sterlitamak branch of the Bashkir State University
37 Prospekt Lenina, 453103 Sterlitamak, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: grigoryevgiv@gmail.com*

In this article step by step algorithms were developed for solving optimal control problems based on the method of successive approximations and the method of variations in the space of controls. A numerical study and comparative analysis of the developed algorithms performed at different values of accuracy.

Keywords: method of successive approximations, the method of variations, optimal control, numerical algorithm.