Неустойчивые подмодули в модуле целых функций Шварца

Н. Ф. Абузярова*, А. В. Воднев

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

**Email: abnatf@gmail.com*

Построены неустойчивые 2-порожденные подмодули в модуле целых функций, изоморфном пространству распределений с компактным носителем в интервале вещественной прямой.

Ключевые слова: подмодули, преобразование Фурье-Лапласа, спектральный синтез.

Пусть $(a;b)$ – конечный или бесконечный интервал вещественной прямой, $P(a;b)$ – совокупность всех целых функций экспоненциального типа, индикаторные диаграммы которых – отрезки мнимой оси $i[c;d], a < c \leq d < b$, и растущих на вещественной оси не быстрее многочлена. Снабженное топологией индуктивного предела последовательности банаховых пространств P_k (определение см., например, в [1]), $P(a;b)$ есть локально-выпуклое пространство типа (LN^*), в котором операция умножения на свободную переменную z непрерывна (последнее означает, что $P(a;b)$ – топологический модуль над кольцом многочленов $C[z]$).

В данной работе мы будем пользоваться терминологией и обозначениями из работ [1–3]. Используя принцип двойственности [2], предложение 2 [1] и предложение 3.1 [4], пример 2 из [4], нетрудно вывести, что для любых двух точек c и d, принадлежащих интервалу $(a;b), c \leq d$, подмодуль $J_{c,d}$, порожденный функциями e^{-icz} и e^{-idz}, то есть равный замыканию в $P(a;b)$ множества $\{pe^{-icz} + qe^{-idz}\}$, где p, q – многочлены, не будет устойчивым. Нулевое множество этого подмодуля пусто, иначе говоря, соответствующее D-инвариантное подпространство пространства Шварца $C^{\infty(a;b)}$, описанное в примере 2 работы [4], не содержит экспонент.

Используя результаты работ [1–2, 4] можно указать 2-порожденные неустойчивые подмодули с непустым нулевым множеством.

Теорема. *Пусть $a < c_1 < d_1 < c_2 < d_2 < b, f_j, j = 1.2,$ – функции из модуля $P(a;b)$ с индикаторными диаграммами $i[c_j;\ d_j]$ и нулевыми множествами Λ_j такими, что множество $\Lambda = \Lambda_1 \cap \Lambda_2$ не пусто и конечно. Тогда подмодуль J, порожденный функциями f_1 и f_2 не является устойчивым.*

Доказательство.

Предположим противное, а именно, что J – устойчивый подмодуль. Согласно предложению 2 [1] спектр двойственного ему D-инвариантного подпространства W дискретен (равен $(-i\Lambda)$). Резидуальный промежуток этого подпространства есть $[c_1;\ d_2]$, и по предложению 6.1 из [4] подпространство W представляет собой прямую сумму конечномерного подпространства, порожденного множеством $e^{-i\Lambda}$, и резидуального подпространства $W_{[c_1;\,d_2]}$.

К противоречию со сделанным предположением приходим, рассматривая, например, функцию $g(t) \in C^\infty(a;b)$, равную $e^{-i\mu t}$, $\mu \notin \Lambda$, на отрезке $[a';b']$ $(d_1 < a' < b' < c_2)$, и равную нулю всюду вне отрезка $[a'';b'']$ $(d_1 < a'' < a' < b' < b'' < c_2)$. С одной стороны, функция g не может принадлежать W, так как она не является элементом линейной оболочки множества $e^{-i\Lambda}$ на отрезке $[c_1;d_2]$. С другой стороны, из определения подмодуля J, взаимного расположения точек c_j, d_j, a'', b'', и принципа двойственности (см. [2]) следует, что $g \in W$. Полученное противоречие доказывает теорему.

Соответствующее подмодулю J по двойственности D-инвариантное подпространство W содержит экспоненциальные одночлены, но не допускает слабый спектральный синтез, и, в силу доказанной теоремы и предложения 2 из [1], спектр W совпадает со всей комплексной плоскостью.

Литература

1. Н. Ф. Абузярова. Замкнутые подмодули в модуле целых функций экспоненциального типа и полиномиального роста на вещественной оси.// Уфимский матем. журнал. 2014. Т. 6, N 4. С. 3–18.

2. Н. Ф. Абузярова. Спектральный синтез в пространстве Шварца бесконечно дифференцируемых функций.// Доклады РАН. 2014. Т. 457. N 5. С. 510–513.

3. И. Ф. Красичков-Терновский. Локальное описание замкнутых идеалов и подмодулей аналитических функций одной переменной. I.// Известия АН СССР, серия матем. 1979. Т. 43. N 1. С. 44–66.

4. A. Aleman, B. Korenblum. Derivation-Invariant Subspaces of C^∞.// Computation Methods and Function Theory. 2008. V. 8. N 2. Pp. 493–512.

5. A. Aleman, A. Baranov, Yu. Belov. Subspaces of C^∞invariant under the differentiation.// Journal of Functional Analysis. 2015. V. 268. Pp, 2421–2439.

Статья рекомендована к печати кафедрой математического анализа ФМиИТ БашГУ
(докт. физ.-мат. наук Х. К. Ишкин)

Unstable submodules in the Schwartz module of entire functions

N. F. Abuzyarova*, A. V. Vodnev

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: abnatf@gmail.com*

We construct unstable submodules in the module of entire functions, which is isomorphic to the Schwartz space of distributions with compact support in the subinterval of real line.

Keywords: submodules,Fourier-Laplace transform, spectral synthesis.