Асимптотика спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой с кусочно-аналитичным потенциалом

А. В. Резбаев, Х. К. Ишкин*

Башкирский государственный университет

Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

**Email: ishkin62@mail.ru*

В статье изучаются условия, при которых спектр оператора Штурма–Лиувилля на некоторой гладкой кривой локализуется около счетного числа лучей. В случае, когда потенциал кусочно-аналитичен, найдена асимптотика собственных чисел каждой серии, локализующейся около соответствующего луча. Полученный результат позволяет обобщить известную формулу об асимптотике функции распределения спектра, которая была установлена Б. Дэвисом в случае конечного числа лучей локализации.

Ключевые слова: дифференциальные операторы, оператор Штурма-Лиувилля на кривой, кусочно-гладкие функции, локализация спектра.

Пусть γ – кривая с параметризацией $z(x) = x + is(x), x \in [0,1]$,где функция s непрерывно дифференцируема, s' не убывает и $s(0) = s(1) = 0, s'(0) < 0 < s'(1)$ (см. рисунок 1).

Обозначим $\alpha_0 = \operatorname{arctg} s'(0)$, $\alpha_1 = \operatorname{arctg} s'(1)$. Тогда

$$-{}^{\pi}/_{2} < \alpha_0 < 0 < \alpha_1 < {}^{\pi}/_{2} \tag{1}$$

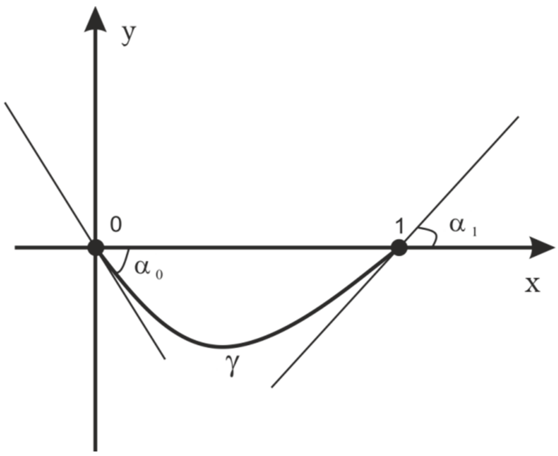

Рис. 1. Кривая γ.

Пусть функция y абсолютно непрерывна на кривой γ (относительно меры $|dz|$). Функцию

$$y'_\gamma \coloneqq \lim_{\gamma \ni \zeta \to z} \frac{y(\zeta) - y(z)}{\zeta - z},$$

определенную почти всюду на γ будем называть *производной вдоль* γ. Аналогично определяем $y_\gamma''(z)$ и т.д. (в предположении что эти объекты существуют). Всюду далее, если не возникает путаницы, значок γ в $y_\gamma^{(n)}$ будем опускать.

Пусть $q \in L^1(\gamma)$. *Оператором Штурма-Лиувилля на кривой* γ будем называть оператор L_γ, действующий в пространстве $L^2(\gamma)$ по правилу $L_\gamma y = -y'' + qy$ на своей области определения $D(L_\gamma) = \{y \in L^2(\gamma): y' \in AC(\gamma), -y'' + qy \in L^2(\gamma), y(0) = y(1) = 0\}$.

Точно так же, как в случае $\gamma = [0,1]$, доказывается, что оператор L_γ плотно определен. Отсюда, поскольку спектр L_γ дискретен [2, Лемма 2], то оператор L_γ замкнут.

Определение 1. Будем говорить, что спектр T_0 **локализован около луча** $\arg\lambda = \alpha_0$ тогда и только тогда, когда $\forall\, \varepsilon > 0$

$$N(T_0, r) \sim N(T_0, \alpha_0 - \varepsilon, \alpha_0 + \varepsilon, r), r \to +\infty, \tag{2}$$

где $N(T, \eta, \zeta, r)$ и $N(T, r)$ – число собственных значений оператора T соответственно в секторе $\{\eta < \arg\lambda < \zeta, |\lambda| < r\}$ и круге $\{|\lambda| < r\}$.

Используя условие (1), легко показать, что за исключением конечного числа все собственные значения оператора L_γ лежат в угле $-2\alpha_1 < \arg\lambda < -2\alpha_0$. В работах [3, 4] показано, что спектр оператора L_γ локализуется (в смысле определения 1) около луча $\arg\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда функция q допускает мероморфное продолжение в область Ω, ограниченную кривой γ и отрезком $[0,1]$, с полюсами $\{z_k\}$, которые могут скапливаться только к отрезку $[0,1]$, и в окрестности каждого полюса z_k справедливо разложение

$$q(z) = \frac{m_k(m_k-1)}{(z-z_k)^2} + \sum_{i=0}^{m_k-1} c_{ki}(z - z_k)^{2i} + (z - z_k)^{2m_k-1} r(z),$$

где $m_k \in \mathbb{N}$, c_{ki} – некоторые числа, функция $r(z)$ голоморфна в некоторой окрестности точки z_k.

Обозначим через T_0 оператор L_γ с потенциалом q, удовлетворяющим этому критерию. Тогда

$$N(T_0, r) \sim \frac{\sqrt{r}}{\pi}, \qquad r \to +\infty;$$

Теорема 1. *Справедливы утверждения:*

если $-2\alpha_0 \le \beta \le 2\pi - 2\alpha_1$, *то*

$$\left\|(T_0 - r^{i\beta})^{-1}\right\| = O(r^{-1}), r \to +\infty,$$

равномерно по $\beta \in [-2\alpha_0, 2\pi - 2\alpha_1]$;

2) функция распределения спектра оператора $|T_0|$ *имеет асимптотику*

$$N(|T_0|, r) \sim \frac{\sqrt{r}}{\pi}, r \to +\infty;$$

Пусть $\{\alpha_k\}_1^\infty$- последовательность точек на кривой γ, таких, что последовательность $\{\mathrm{Re}\,\alpha_k\}$ убывая стремится к 0 при $k \to \infty$. Положим

$$V(z) = v_K, z \in \gamma_k,$$

где γ_k – дуга кривой γ, соединяющая точки a_k и a_{k-1} $(a_0 = 1)$, $\{v_k\}_1^\infty$ – ограниченная последовательность, такая, что $v_{k+1} \neq v_k$ $(k = 1,2, \ldots)$.

Введем оператор $T = T_0 + V$, где V- оператор умножения на функцию $V(\cdot)$.

Теорема 2. *Пусть функция q в области Ω_1, ограниченной дугой γ_1 и отрезком $[1, a_1]$ может иметь только конечное число полюсов. Тогда*

при любом $\varepsilon > 0$ спектр оператора T вне угла $-\varepsilon - 2\,arg(1 - a_1) < arg\,\lambda < -2\alpha_0$ конечен;

спектр оператора T допускает представление

$$\sigma(T) = \cup_{k=1}^{\infty} \cup_{n=1}^{\infty} \lambda_n^{(k)}, \tag{3}$$

$$\lambda_n^{(k)} \sim \left(\frac{\pi n}{a_k - a_{k-1}}\right)^2 + c_{nk}, \tag{4}$$

где

$$\sup_{n,k} |c_{nk}| < \infty$$

Следствие. *В условиях теоремы 2 имеет место формула*

$$N(T, r) \sim \frac{|l|\sqrt{r}}{2\pi}, r \to +\infty,$$

где $|l|$ длина ломаной l с вершинами в точках $\{\alpha_k\}_0^\infty$.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, грант №15–01–01095.

Литература

1. Davies E. B. Eigenvalues of an elliptic system // Math. Zeitschrift. 2003. 243. C.719–743
2. Ишкин Х. К. О необходимых условиях локализации спектра задачи Штурма–Лиувилля на кривой // Матем. заметки. 2005. Т.78. Вып.1. С.72–84
3. Ишкин Х. К. О критерии безмонодромности уравнения Штурма–Лиувилля // Матем. Заметки. 2013. Т.94. Вып.4. С.552–568
4. Ишкин Х. К. Критерий локализации спектра оператора Штурма–Лиувилля на кривой // Алгебра и анализ. 2016. Т.28. Вып.1. С.52–88

Статья рекомендована к печати кафедрой математического анализа БашГУ
(докт. физ. мат. наук, проф. Х. К. Ишкин)

Asymptotics of the spectrum of a Sturm–Liouville operator on a curve with piecewise analytic potential

A. V. Rezbaev, Kh. K. Ishkin*

Bashkir State University

32 Zaki Validi Street, 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: ishkin62@mail.ru*

In this paper, we study conditions for the localization of the spectrum of a non-selfadjoint Sturm–Liouville operator on a smooth curve. The conditions under which the spectrum is localized about a countable number of rays is obtained. In the case where the potential is piecewise analytic, we have obtained the asymptotic of eigenvalues of each series. The obtained result allows us to generalize the well known formula for asymptotics of spectral distribution function, which was established by B. Davies in the case of finite number of localization rays.

Keywords: differential operators, Sturm–Liouville operator on a curve, piecewise smooth function, spectral localization.