Представление решения однородного уравнения свертки в виде ряда экспоненциальных мономов

О. А. Кривошеева

Башкирский государственный университет

Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

Email: kriolesya2006@yandex.ru

В работе рассматриваются последовательности, имеющие нулевую плотность. Показывается, что каждое аналитическое решение однородного уравнения свертки с характеристической функцией экспоненциального минимального типа в области своего существования представляется в виде ряда экспоненциальных мономов. Также приводится обобщение работ Д. Полиа.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, верхняя плотность, фундаментальный принцип, уравнение свертки.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – кратная неограниченно возрастающая по модулю последовательность комплексных чисел, т.е. $\lambda_k \in \mathbb{C}$, n_k – натуральное число, называемое кратностью точки λ_k, $|\lambda_{k+1}| > |\lambda_k|, k = 1.2, \ldots,$ и $|\lambda_k| \to \infty$ при $k \to \infty$. Пусть $B(z, r)$ – круг с центром в точке z радиуса r. Обозначим через $n(r, \Lambda)$ – число точек λ_k (с учетом их кратностей), попавших в круг $B(0, r), r > 0$. Верхней плотностью Λ называется величина

$$\overline{n}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{n(r,\Lambda)}{r}.$$

Рассмотрим последовательность простых точек $\Lambda = \{\lambda_k, 1\}_{k=1}^{\infty} = \{\lambda_k\}_{k=1}^{\infty}$ и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} d_k e^{\lambda_k z}. \quad (1)$$

Д. Полиа [1] доказал, что при условии нулевой плотности $\overline{n}(\Lambda) = 0$ каждая сумма ряда (1) (она автоматически является аналитической функцией) имеет выпуклую область существования. В работе [2] Д. Полиа обобщил этот результат. Рассмотрим однородное уравнение свертки

$$\mathrm{M}_f(g) = \int_{\mathbb{C}} g(z + w)\mathrm{d}\mu(z) \equiv 0, \quad (2)$$

где μ – комплексная мера с компактным носителем и

$$f(\lambda) = \int_{\mathbb{C}} e^{\lambda z}\mathrm{d}\mu(z)$$

– преобразование Лапласа функционала, порождающего оператор свертки, называемое характеристической функцией оператора M_f. Предположим, что $f(\lambda)$ – функция экспоненциального минимального типа, т.е. для каждого $\varepsilon > 0$ существует постоянная $C(\varepsilon) > 0$ такая, что $\ln|f(\lambda)| \le C(\varepsilon) + \varepsilon|\lambda|, \lambda \in \mathbb{C}$. Тогда оператор M_f определен в пространстве функций g аналитических в окрестности начала (каждая g является аналитической в своей окрестности). В работе [2] доказывается, что при указанном условии каждое аналитическое решение уравнения (2) имеет выпуклую область существования.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ – последовательность нулей и их кратностей функции f. Отметим, что если $f(\lambda)$ – функция экспоненциального минимального типа, то плотность $\overline{n}(\Lambda)$ ее нулевого множества равна нулю (см. [3], гл. I, §11, теорема Линделефа).

Валирон в работе [4] доказал, что каждое аналитическое решение уравнения (2) в области своего существования представляется в виде

$$g(z) = \lim_{m\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<r_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \tag{3}$$

$\{r_m\}$ – неограниченно возрастающая последовательность положительных чисел такая, что на окружностях $|\lambda| = r_m, m = 1,2, \ldots,$ модуль функции f имеет подходящие оценки снизу. Система функций $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}, k \geq 1, n = \overline{0, n_k - 1}$, называется множеством элементарных решений уравнения (2).

Пусть D – выпуклая область в $\mathbb{C}$ и $H(D)$ обозначает пространство функций аналитических в $\mathcal{D}$ с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах D. Через $H^*(D)$ обозначим сильно сопряженное к $H(D)$ пространство, называемое пространством аналитических функционалов. Для последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ символом $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}, k \geq 1, n = \overline{0, n_k - 1}$. Система функций $\mathcal{E}(\Lambda)$ называется множеством элементарных решений уравнения (2). Подпространство $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ является замкнутым и инвариантным относительно оператора дифференцирования. Каждая функция $g \in \mathcal{W}(\Lambda, D)$ есть предел последовательности линейных комбинаций элементов $\mathcal{E}(\Lambda)$. Естественно возникает задача представления g в виде ряда по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$. Первым результатом в этом направлении является фундаментальный принцип Л. Эйлера. Он утверждает, что каждое решение линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами является линейной комбинацией элементарных решений из $\mathcal{E}(\Lambda)$. В связи с этим задача представления функций из $\mathcal{W}(\Lambda, D)$ рядом

$$\sum_{k=1,n=0}^{\infty,n_k-1} d_{n,k} z^{\mathrm{n}} \exp(\lambda_k z)$$

носит название проблемы фундаментального принципа в инвариантном подпространстве.

Если $a \in \mathbb{C}$, то положим:

$$\mathcal{W}(\Lambda, a) = \bigcup_{D \ni a} \mathcal{W}(\Lambda, D),$$

где D пробегает множество всех выпуклых окрестностей точки a. Пространство $\mathcal{W}(\Lambda, a)$ наделим топологией индуктивного предела.

Отметим, что согласно указанному выше результату Валирона пространство аналитических решений уравнения (2) с характеристической функцией $f(\lambda)$ экспоненциального минимального типа вложено в пространство $\mathcal{W}(\Lambda, 0)$.

В настоящей работе приводятся два результата: Теорема 1 содержит в себе отмеченные выше результаты Д. Полиа из работ [1] и [2], а в Теореме 2 дается решение проблемы фундаментального принципа для подпространства $\mathcal{W}(\Lambda, a)$.

Теорема 1. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) каждая функция из $\mathcal{W}(\Lambda, a)$ имеет выпуклую область существования;
2) $\overline{n}(\Lambda) = 0$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$. Следуя работе [5] введем величину, которая является аналогом индекса конденсации Бернштейна. Рассмотрим функцию

$$q_\Lambda(z, w, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k}.$$

В случае, когда круг $B(w, \delta|w|)$ не содержит ни одной точки λ_k, полагаем $q_\Lambda(z, w, \delta) \equiv 1$. Модуль функции $q_\Lambda(z, w, \delta)$ можно интерпретировать как меру сгущения точек $\lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ около z. Величина $\ln|q_\Lambda(z, w, \delta)|/|w|$ аналогична по смыслу логарифму среднего геометрического (среднему арифметическому логарифмов) нормированных расстояний от $\lambda_k \in B(w, \delta|w|)$ до z. Если $\delta \in (0.1)$, то модуль каждого сомножителя из определения q_Λ в круге $B(w, \delta|w|)$ оценивается сверху величиной $2\big(3(1-\delta)\big)^{-1}$. Поэтому для $\delta \in (0, 1/3)$ он не превосходит единицы. Положим

$$q_\Lambda^m(z, \delta) = q_\Lambda(z, \lambda_m, \delta)\left(\frac{z - \lambda_m}{3\delta|\lambda_m|}\right)^{-n_m}, \mathcal{S}_\Lambda = \lim_{\delta \to 0} \lim_{m \to \infty} \frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m, \delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Из определения величины $\mathcal{S}_\Lambda$ следует неравенство $\mathcal{S}_\Lambda \le 0$. Равенство $\mathcal{S}_\Lambda = 0$ означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Примеры вычисления характеристики $\mathcal{S}_\Lambda$ для различных последовательностей можно найти в работе [6].

Теорема 2. *Пусть $a \in \mathbb{C}$ и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что $\overline{n}(\Lambda) = 0$. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) система $\mathcal{E}(\Lambda)$ является базисом в подпространстве $\mathcal{W}(\Lambda, a)$;
2) $\mathcal{S}_\Lambda = 0$.

Литература

1. Polya G. Eine Verallgemeinerung des Fabryschen Lückensatzes// Nachr. Geselesch Wissensch. Göttingen. 1927. S. 187–195.

2. Polya G. Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen// Math. Zeits. 1928. Bd. 29. S. 549–560.
3. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат. 1956.
4. Valiron G. Sur les solutions des équations différentielles linéares d'ordre infinit et à coefficients constants// Ann. Ec. Norm. Sup. 1929. T. 46. P. 25–53.
5. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях// Известия РАН. Серия математическая. 2004. Т.68. №2. С. 71–136.
6. Кривошеева О. А. Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости// Алгебра и анализ. 2011. Т.23. №2. С. 162–205.

Статья рекомендована к печати факультетом математики и информационных технологий БашГУ (докт. физ.-мат. наук, проф. З. Ю. Фазуллин)

A representation of a solution of a homogenous convolution equation as the series of exponential monomials

O. A. Krivosheeva

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: kriolesya2006@yandex.ru

In the paper it is shown that every analytic solution of the homogeneous convolution equation with the characteristic function of a minimal exponential type in the domain of its existence is represented as the series of exponential monomials. It is also given a generalization of G. Polya's results.

Keywords: invariant subspace, upper density, fundamental principle, convolution equation.