Актуарные расчеты при заболевании туберкулезом

С. И. Спивак[1], О. А. Кислицына[2]*

[1]*Институт нефтехимии и катализа РАН*
Россия, Республика Башкортостан, 450075 г. Уфа, проспект Октября, 141.

[2]*Башкирский государственный университет*
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

**Email*: *andreevnaolga@gmail.com*

Целью работы является построение методологии решения обратных задач медицинского страхования на основе математических моделей Марковских процессов. Проведен актуарный анализ математической модели медицинского страхования при заболевании туберкулезом. Разработанная математическая модель построена с помощью реальных данных по заболеванию туберкулезом на территории Республики Башкортостан. В данном исследовании приведены реальные механизмы расчета страховых тарифов для специалистов по медицинскому страхованию.

Ключевые слова: страхование, актуарий, Марковская цепь, уравнение Колмогорова, граф состояний.

Актуарии сходятся во мнении, что медицинское страхование наиболее сложно для расчета, нежели чем, например, пенсионное страхование. Так как наступление пенсионного возраста регламентировано федеральным законом, а в системе медицинского страхования, момент заболевания, то есть наступления страхового случая, непредсказуем. У каждого человека, в процессе своей жизнедеятельности, может ухудшаться или улучшаться здоровье, наконец он может либо выздороветь, либо умереть.

В мировой практике, такого вида актуарные расчеты традиционно опираются на весьма непростую экономико-математическую модель, называемую моделью многих состояний. Эта модель позволяет максимально точно учитывать перечисленные ранее особенности медицинского страхования. В общем случае, модель системы медицинского страхования включает k совокупностей: первая – здоровое состояние, в k-ой – наступление летального исхода, а в какой-либо совокупности с номером от 2 до k-1 – как заболевание определенной тяжести.

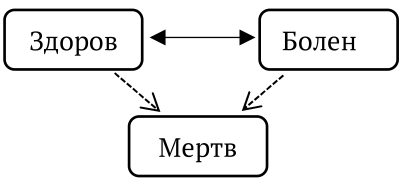

Рис 1. Схема модели многих состояний.

В данном случае индивид может переходить из состояния «здоров» в состояние «болен» и наоборот, при том по несколько раз. Это в значительной степени усложняет расчеты.

Рассмотри общий вид Марковского процесса и его свойства.

Обозначим через $X(t)$ состояние индивида в возрасте $t (t \geq 0)$. Определим стохастический процесс как $\{X(t), t \geq 0\}$. Предположим, что имеется конечное число состояний, пронумерованных $1.2, .., n$, т.е. процесс имеет пространство состояний $\{1.2, .., n\}$. Тогда $\{X(t), t \geq 0\}$ – Марковский процесс, если для любых $s, t \geq 0$ и $i, j, x(u) \in \{1.2, .., n\}$,

$$\Pr\{X(s+t) = j \,|X(u) - x(u), 0 \leq u < s\} = \Pr\{X(s+t) = j \,|X(s) = i\}$$

Иначе говоря, будущее процесса (после момента времени s) зависит только от состояния в момент времени s и не зависит от истории процесса до момента s.

Определим функцию вероятности перехода

$$p_{ij}(s, s+t) \equiv \Pr\left\{X(s+t) = j \,|X(s) = i\right\}, i, j \in \{1.2, .., n\},$$

и положим, что

$$\sum_{j=1}^{n} p_{ij}(s, s+t) = 1 \text{ для } \forall\, t \geq 0.$$

Предположим также существование пределов

$$\mu_{ij}(t) = \lim_{h \to 0} {p_{ij}(t, t+h)}/{h},$$

$$i, j \in \{1.2, .., n\}, i \neq j.$$

При $i \neq j$ μ_{ij} – это интенсивность перехода их состояния i в состояние j. Легко видеть, что при $s, t, u \geq 0$ уравнение Колмогорова–Чепмена:

$$p_{ij}(s, s+t+u) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}(s, s+t) p_{ij}(s+t, s+t+u), i, j \in \{1.2, .., n\}. \quad (1)$$

При вычислении актуарных значений нам понадобятся функции вероятности перехода. Интенсивности переходов и функции вероятности перехода связаны с прямыми и обратными уравнениями Колмогорова

$$\partial/_{\partial t}\, p_{ij}(s, s+t) = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}(s, s+t) \mu_{ij}(s+t), \quad (2)$$

$$\partial/_{\partial t}\, p_{ij}(s, s+t) = -\sum_{i=1}^{n} \mu_{ij}(s) p_{ij}(s, s+t), \quad (3)$$

соответственно, с граничными условиями

$$\boldsymbol{p_{ij}}(\boldsymbol{s}, s) = \delta_{ij}, \text{ где } \delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{если } i = j \\ 0, \text{иначе} \end{cases}.$$

Если интенсивности переходов неизвестны, возникает обратная задача, то есть задача оценивания интенсивностей переходов по статистическим данным. Решение обратной задачи сводится к анализу информативности измерений.

Для того, чтобы оценить качество решения обратной задачи, мы будем учитывать то, чтобы полученная величина интенсивности попадала внутрь заданного интервала. Это решается путем анализа соответствующих экспериментальных данных. Именно этот факт приводит нас к необходимости построения соответствующих математических моделей и их использования как способа переработки больших информационных массивов.

Рассмотрим этот вопрос на примере процесса заболевания туберкулезом как модель многих состояний.

Для заболевания туберкулезом рассмотрим 3 состояния системы: A_1-«здоров», A_2-«болен туберкулезом», A_3-«смерть», где λ_{ij}-интенсивности переходов из одного состояния в другое. (Рис. 2). На самом деле, возможно описать достаточно много состояний, описывающих ту или иную степень заболевания, в нашем случае мы ограничимся наиболее простой схемой.

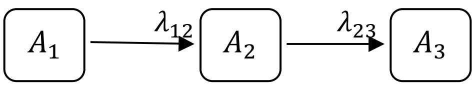

Рис. 2. Граф состояний

Составим уравнение Колмогорова для нахождения вероятностей нахождения индивида в каком-либо из состояний. Для нашей схемы (Рис. 2), система дифференциальных уравнений будет иметь вид:

$$\begin{cases} {dp_1(t)}/{dt} = -\lambda_{12} p_1(t) \\ {dp_2(t)}/{dt} = \lambda_{12} p_1(t) - \lambda_{23} p_2(t) \\ {dp_3(t)}/{dt} = \lambda_{23} p_2(t) \end{cases} \qquad (4)$$

Здесь $p_i(t)$ $(i = \overline{1.3})$ – вероятность состояния A_i.

По данным Республиканского противотуберкулезного диспансера РБ и предоставленным данным кафедрой фтизипульмонологии БашГУ активных больных туберкулезом на 2002 год на учете состоят 4942 человек. Население РБ составляет около 4 000 000 человек, следовательно, в начальный момент времени не зараженных туберкулезом 3995058 человек. Таким образом, эти условия будут иметь вид:

$$p_1(0) = {4*10^6 - 4942}/{4*10^6} = 0.9987645$$

$$p_2(0) = {4942}/{4*10^6} = 0.0012355 \tag{5}$$

$$p_3(0) = 0$$

Кроме того, для любого момента времени t выполняется условие:

$$p_1(t) + p_2(t) + p_3(t) = 1 \tag{6}$$

Так как интенсивности переходов нам известны, задача сводится к решению прямой задачи уравнения Колмогорова.

Решим систему Колмогорова (4) для λ_{12} и λ_{23} с краевыми условиями (5), получим:

$$\begin{cases} p_1 = 0.9987645 * e^{-\lambda_{12}t} \\ p_2 = \left({0.9987645*\lambda_{12}}/{\lambda_{23}-\lambda_{12}}\right) * e^{-\lambda_{12}t} + \left({0.0012355*\lambda_{23}-\lambda_{12}}/{\lambda_{23}-\lambda_{12}}\right) * e^{-\lambda_{23}t} \\ p_3 = 1 - p_1 - p_2 \end{cases} \tag{7}$$

Найдем интенсивности переходов для математической модели (4). Из уравнения (7) для вероятности p_1 можем выразить интенсивность перехода λ_{12}:

$$\lambda_{12} = -{\ln(1.001237028 * p_1)}/{t} \tag{8}$$

Значение других вероятностей выражаем аналогично. Определим область неопределенности по интенсивностям λ_{ij} как решение системы неравенств $\left|p_i^{\text{ст}} - p_i^{\text{р}}\right| \leq \varepsilon_i$, где $p_i^{\text{ст}}$ – табличные данные по вероятностям заболеваний сахарным диабетом; $p_i^{\text{р}}$ – вероятности, рассчитанные по системе (4). В результате вычислений получили интервалы изменения интенсивностей:

$$\boldsymbol{\lambda_{12}} = [0.001; 0.0029] \tag{9}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_{23} = [0.00001; 0.2462] \tag{10}$$

Основным методом лечения туберкулеза является прием антибиотиков или даже одновременное применение нескольких антибиотиков с противобактериальным действием. Однако, у возбудителей туберкулеза со временем развивается привыкание, соответственно, они становятся устойчивыми к распространенным противотуберкулезным препаратам.

По данным Республиканского противотуберкулезного диспансера РБ курс стационарного лечения больного туберкулезом составляет в среднем 259 000 руб. в год. Интервал изменения этой величины [140 000 руб.; 383 000 руб.].

На основе математических ожиданий численности количества больных определены величины расходов на медицинскую помощь болеющим туберкулезом $[6.9188 * 10^8; 83.57826 * 10^8]$.

Имея интервал изменения интенсивности перехода можем построить в среднем интервал по деньгам необходимых для лечения больных туберкулезом: $[10.36 * 10^8; 30.044 * 10^8]$.

Таким образом, найденный интервал входит в интервал изменения затрат на лечение больных туберкулезом. Следовательно, данный метод определения интервала позволяет эффективно решать задачи, связанные с расчетом в медицинском страховании.

Литература

1. Райманова Г. К. Математическое моделирование в задачах медицинского страхования, профилактики и лечения туберкулеза. Уфа, 2009. 100 с.
2. Баскаков В. Н. Аддитивная оценка функции дожития и ее применение в актуарной математике // Вестник МГТУ. Сер. Естественные науки. – 1999. -№1
3. Спивак С. И., Райманова Г. К. Математическая модель процесса заболевания туберкулезом // Системы управления и информационные технологии. 2009. №2.2 (36). С. 293–297
4. Спивак С. И., Г. К. Райманова, Абдюшева С. Р. Обратные задачи для Марковских моделей медицинского страхования // журнал Страховое дело – №9(188), 2008, с. 36–42
5. Бойков А. В. Страхование и актуарные расчеты. –М.: РОХОС, 2004. – 96 с.

Статья рекомендована к печати кафедрой математического моделирования БашГУ
(докт. ф.-м. наук, проф.С. И. Спивак)

Actuarial calculations for tubercuculosis

S. I. Spivak[1], O. A. Kislitsyna[2*]

[1]Institute of Petrochemistry and Catalysis, Russian Academy of Sciences
141 Prospekt Oktyabrya, 450075 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[2]Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: andreevnaolga@gmail.com*

The aim of the work is to build a methodology for solving inverse problems of medical insurance based on mathematical models of Markov processes. Actuarial analysis of the mathematical model of medical insurance for tuberculosis was carried out. The developed mathematical model is used with the help of real data on tuberculosis disease in the territory of the Republic of Bashkortostan. This study provides real mechanisms for health insurance professionals to calculate insurance rates.

Keywords: insurance, actuary, Markov chain, Kolmogorov equation, state graph.