Схема исследования устойчивости субгармонических колебаний систем с периодическими коэффициентами в случае сильного резонанса

М. Г. Юмагулов[1], С. А. Муртазина[2*]

[1]Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

[2]Башкирский государственный университет, Сибайский институт (филиал)
Россия, Республика Башкортостан, 453833 г. Сибай, улица Белова, 21.

**Email: sariamurtaz@mail.ru*

В данной статье рассматривается вопрос об устойчивости возникающих при бифуркации периодических решений систем с периодическими коэффициентами в частном случае сильного резонанса. Получены новые теоремы об устойчивости этих решений.

Ключевые слова: динамические системы, устойчивость, бифуркация, субгармонические колебания.

Рассматривается зависящая от параметра $\mu \in R^k$ динамическая система с T-периодической правой частью

$$x' = A(t,\mu)x + a(x,t,\mu),\ x \in R^2, \tag{1}$$

где матрица $A(t,\mu)$ и вектор-функция $a(x,t,\mu)$ непрерывны по t и непрерывно дифференцируемы по x, μ. Нелинейность $a(x,t,\mu)$ представима в виде

$$a(x,t,\alpha,\beta) = a_2(x,t,\mu) + a_3(x,t,\mu) + \widetilde{a_4}(x,t,\mu), \tag{2}$$

где $a_2(x,t,\mu)$ и $a_3(x,t,\mu)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а нелинейность $\widetilde{a_4}(x,t,\alpha,\beta)$ удовлетворяет соотношению $\|\widetilde{a_4}(x,t,\mu)\| = \mathrm{O}\|x\|^4$ при $\|x\| \to 0$ равномерно по t, μ.

Обозначим через $V(\mu)$ матрицу монодромии линейной системы

$$x' = A(t,\mu)x\ . \tag{3}$$

Здесь $V(\mu) = X(T,\mu)$, где $X(T,\mu)$ – фундаментальная матрица решений системы (3).

Пусть система (1) при любых значениях параметров μ имеет нулевую точку равновесия $x = 0$. Предполагается, что при некотором $\mu = \mu_0$ эта точка является негиперболической, т.е. матрица $V(\mu_0)$ имеет одно или два собственных значения по модулю равных одному. При таком μ_0 системы (1) структурно неустойчива в окрестности состояния равновесия $x = 0$ и в системе (1) возможны различные локальные бифуркации в окрестности решения $x = 0$. В частности, при малейшем изменении правой части системы, вызванным изменением параметра, возможно возникновение нестационарных периодических решений, квазипериодических решений. В этом случае значение μ_0 называют точкой бифуркации. Основными являются следующие случаи негиперболичности, когда матрица $V(\mu_0)$ имеет:

1^0 простое собственное значение 1;

2^0 пару простых собственных значений вида $e^{\pm 2\pi\theta i}$, $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$:

P1. θ иррационально; P2. θ рационально: $\theta = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, $q \geq 5$; P3. θ рационально: $\theta = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, $q = 2, 3, 4$.

Предполагается, что остальные собственные значения матрицы $V(\mu_0)$ не равны по модулю 1. Следует отметить, что случай P3 обычно называется сильным резонансом, а случай P2 – слабым резонансом.

В случае 1^0 при значениях параметра μ близких μ_0 в системе (1) возникают T-периодические решения малой амплитуды в окрестности решения $x = 0$. Данный сценарий называется бифуркацией вынужденных колебаний. Коразмерность этой бифуркации равно 1, поэтому естественно предположить, что $\mu \in R^1$. В случаях P1-P2 в пространстве $R^3 = \{(t, x): t \in R^1, x \in R^2\}$ возникает инвариантная поверхность в виде цилиндра $\mathrm{T}(\mu)$, которая ограничивает решение $x = 0$. Поверхность $\mathrm{T}(\mu)$ гладко зависит от μ и она стягивается к нулевому решению $x = 0$ при $\mu \to \mu_0$. Цилиндр $\mathrm{T}(\mu)$ может быть как асимптотически устойчивым (т.е. притягивать решения, стартующие из некоторой окрестности данной поверхности) так и неустойчивым. Если θ иррационально (случай P1), то типичным является сценарий, при котором на поверхности $\mathrm{T}(\mu)$ возникают квазипериодические решения системы (1). Если $\theta = \frac{p}{q}$ рационально и $q \geq 5$, тогда на поверхности $\mathrm{T}(\mu)$ возникает сразу два периодических решения с периодом qT (бифуркация субгармонических колебаний). Здесь возможны две ситуации: 1) когда одна из периодических решений «устойчива на $\mathrm{T}(\mu)$», а другая «неустойчива на $\mathrm{T}(\mu)$» (решения начинающиеся на $\mathrm{T}(\mu)$ вне периодических, отталкиваются от «неустойчивого на $\mathrm{T}(\mu)$» и стремятся к «устойчивому на $\mathrm{T}(\mu)$»), при этом цилиндр $\mathrm{T}(\mu)$ является асимптотически устойчивым; 2) когда также одна из периодических решений «устойчива на $\mathrm{T}(\mu)$», а другая «неустойчива на $\mathrm{T}(\mu)$» и цилиндр $\mathrm{T}(\mu)$ является неустойчивым. Коразмерность бифуркации в случаях P1-P2 равна 1, поэтому естественно предполагать, что в системе (1) $\mu \in R^1$. В случае P3 основным сценарием является бифуркация субгармонических колебаний периода qT. Коразмерность данной бифуркации равна двум, потому параметр μ естественно считать двумерным. Пусть $\mu = (\alpha, \beta)$. На плоскости параметров (α, β) областью существования субгармонических колебаний являются множества, упирающиеся своим клювом в точку бифуркации $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ называемые языками Арнольда (см. [8]). Язык Арнольда представляет собой множество тех значений параметров (α, β), при которых система (1) имеет qT-периодические решения, амплитуды которых стремятся к нулю при стремлении точки (α, β) к (α_0, β_0). При $q = 2$ ($q = 3$) в системе (1) при каждом (α, β) из соответствующего языка Арнольда возникает ровно одно неустойчивое $2T$-периодическое ($3T$-периодическое) решение. При $q = 4$ ситуация более сложная. При некоторых значениях (α, β) из языка Арнольда возникает по одному $4T$-периодическому решению, при других сразу два $4T$-периодических решения. Причем решения, возникающие при значениях параметра из одного и того же языка Арнольда могут иметь разные свойства устойчивости. Изучению подобных задач посвящено огромное число работ (см., например, [1–9] и имеющуюся там библиографию). Разработаны ряд эффективных методов исследования, направленных как на получение признаков таких бифуркаций, так и их качественный анализ (см., например, [3–4, 8–9] и имеющуюся там библиографию). Особо тщательно изучен случай 1^0([9]).

В задаче исследования локальных бифуркаций систем вида (1) одним из основных является вопрос об устойчивости возникающих периодических решений. Здесь особый интерес представляет подслучай $q = 4$ сильного резонанса Р3. В настоящей статье предлагается новая схема исследования устойчивости субгармонических колебаний в данном случае, основанный на операторных методах исследования локальных бифуркаций ([10–15]).

Пусть для системы (1) выполнено условие Р3. Для удобства число θ оставим вида $\theta = \frac{p}{q}$, но всюду ниже будем предполагать, что $q = 4$. В данном случае, как было сказано выше, основным сценарием является бифуркация субгармонических колебаний. Дадим соответствующее определение.

Значение $\mu_0 = (\alpha_0, \beta_0)$ параметра $\mu = (\alpha, \beta)$ называют точкой бифуркации субгармонических колебаний периода qT системы (1), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такие $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ при которых система (1) имеет ненулевое qT-периодическое решение $x(t, \varepsilon)$, причем $\alpha(\varepsilon) \to \alpha_0$, $\beta(\varepsilon) \to \beta_0$ и $\max\limits_t \|x(t, \varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Предположим, что матрица $A(t, \alpha, \beta)$ в системе (1) имеет вид, часто встречающийся в приложениях

$$A(t, \alpha, \beta) = A_0 + (\alpha - \alpha_0)A_{11}(t) + (\beta - \beta_0)A_{12}(t) + A_2(t, \alpha, \beta), \tag{4}$$

где матрицы $A_{11}(t)$, $A_{12}(t)$ и $A_2(t, \alpha, \beta)$ являются T-периодическими, причем $A_2(t, \alpha, \beta)$ удовлетворяет соотношению вида

$$\max_t \|A_2(t, \mu)\| = O(|\mu - \mu_0|^2)$$

при $|\mu - \mu_0| \to 0$; здесь $\mu = (\alpha, \beta)$ и $|\mu| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$.

Чтобы в системе (1) происходила бифуркация субгармонических колебаний, требуется выполнение некоторого условия невырожденности [10]. Приведем данное условие.

Матрица A_0 (а вместе с ней и транспонированная матрица A_0^*) имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\frac{2\pi\theta i}{T}$. Обозначим через $e \pm ig$ и $e^* \pm ig^*$ соответствующие собственные векторы матриц A_0 и A_0^*.

Определим матрицу

$$Q = \begin{pmatrix} (x_1, e^*) & (x_2, e^*) \\ (x_1, g^*) & (x_2, g^*) \end{pmatrix} \tag{5}$$

Здесь $x_1 = \int_0^{qT}[A_0 x_{11}(t) + A_{11}(t)e_0(t)]dt, x_2 = \int_0^{qT}[A_0 x_{12}(t) + A_{12}(t)e_0(t)]\,dt$, где $e_0(t) = e^{A_0 t}e, x_{11}(t) = \int_0^t e^{A_0(t-s)}A_{11}(s)e_0(s)ds, x_{12}(t) = \int_0^t e^{A_0(t-s)}A_{12}(s)e_0(s)ds.$

Теорема 1. Пусть $detQ \neq 0$. Тогда пара (α_0, β_0) является точкой бифуркации субгармонических колебаний периода qT системы (1). Существуют непрерывные функции $\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + O(\varepsilon), \beta(\varepsilon) = \beta_0 + O(\varepsilon)$ и $x(\varepsilon) = \varepsilon e + O(\varepsilon^2)$ такие, что система (1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ имеет qT-периодическое решение с начальным условием $x(0, \varepsilon) = x(\varepsilon)$. Здесь -малый вспомогательный параметр.

Функции $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ образуют некоторую кривую принадлежащую языку Арнольда. При каждой паре α, β из данной кривой возникает по одному qT-периодическому решению, именно с начальной точкой $x(\varepsilon) = \varepsilon e\, + O(\varepsilon^2)$. Функции $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, $x(\varepsilon)$ вычисляются с использованием векторов $e, g,\ e^*, g^*$. Две пары ортогональных векторов e, g и e^*, g^* сохранением угла и нормы можно повернуть вокруг их начал на любой угол $\varphi \in [0{,}2\pi]$. Причем с каждым новым полученным набором векторов $e(\varphi), g(\varphi),\ e^*(\varphi), g^*(\varphi)$ условие теоремы 1 выполняется и следовательно при $\alpha = \alpha(\varepsilon, \varphi)$, $\beta = \beta(\varepsilon, \varphi)$ в системе (1) возникает семейство qT-периодических решений с начальной точкой $x(\varepsilon, \varphi) = \varepsilon e(\varphi)\, + O(\varepsilon^2)$. Соответствующее решение будем называть субгармоническим колебанием по направлению вектора $e(\varphi)$. Совокупность кривых $\alpha = \alpha(\varepsilon, \varphi)$, $\beta = \beta(\varepsilon, \varphi)$ при $\varphi \in [0{,}2\pi]$ и образует, язык Арнольда.

Примеры показывают, что субгармонические колебания по направлению разных векторов $e(\varphi)$ имеют разные типы устойчивости, поэтому критерии устойчивости будут приведены для периодических решений одного направления вектора $e(0) = e$. Обозначим

$$b_j = \int_0^{qT} e^{-A_0 t} a_j(e_0(t), t, \alpha_0, \beta_0)dt,$$

где $e_0(t) = e^{A_0 t}e.$

Определим числа α_j, β_j по формуле

$$\begin{pmatrix} \alpha_j \\ \beta_j \end{pmatrix} = -Q^{-1} \begin{pmatrix} (b_j, e^*) \\ (b_j, g^*) \end{pmatrix}, \tag{6}$$

где Q – матрица (5).

Определим также матрицу

$$V_2 = \int_0^{qT} e^{-A_0 s} P_2(s) e^{A_0 s} ds + \int_0^{qT} e^{-A_0 s} P_1(s) e^{A_0 s} \left[\int_0^{s} e^{-A_0 \tau} P_1(\tau) e^{A_0 \tau} d\tau\right] ds.$$

где

$$P_1(t) = \alpha_1 A_{11}(t) + \beta_1 A_{12}(t) + a'_{2x}(e_0(t), t, \alpha_0, \beta_0),$$

$$P_2(t) = \alpha_2 A_{11}(t) + \beta_2 A_{12}(t) + a'_{3x}(e_0(t), t, \alpha_0, \beta_0) + a'_{2x}(e_1(t), t, \alpha_0, \beta_0).$$

Здесь $e_1(t) = e^{A_0 t} \int_0^t e^{-A_0 \tau} a_2(e_0(\tau), \tau, \alpha_0, \beta_0) d\tau$.

Теорема 2. Пусть $q = 4$. Пусть действительные части собственных значений матрицы V_2 отрицательны, тогда при всех малых значениях $\varepsilon > 0$ субгармонические колебания $x(t, \varepsilon)$ системы (1) возникающие на кривой $\alpha = \alpha(\varepsilon), \beta = \beta(\varepsilon)$ стартующие из точки $x(\varepsilon)$ асимптотически устойчивы; пусть хотя бы одно собственное значение матрицы V_2 имеет положительную действительную часть, тогда эти решения неустойчивы.

Применим теорему 2 для исследования устойчивости субгармонических колебаний модельного уравнения

$$x' = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_2^2 \\ 2x_1 x_2 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} x_1^3 + 2x_2^3 \\ 2x_1 x_2^2 \end{pmatrix} \sin t. \tag{7}$$

Для этой системы $A_0 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{p}{q} \\ \frac{p}{q} & 0 \end{pmatrix}$, $A_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Матрица A_0 (а вместе с ней и транспонированная матрица A_0^*) имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm \frac{p}{q} i$. Векторы $e \pm ig$ и $e^* \pm ig^*$, где

$$e(\varphi) = \begin{pmatrix} cos\varphi \\ -sin\varphi \end{pmatrix}, g(\varphi) = \begin{pmatrix} -sin\varphi \\ -cos\varphi \end{pmatrix}, e^*(\varphi) = \begin{pmatrix} cos\varphi \\ -sin\varphi \end{pmatrix}, g^*(\varphi) = \begin{pmatrix} -sin\varphi \\ -cos\varphi \end{pmatrix},$$

являются собственными векторами матриц A_0 и A_0^* соответственно при любом $\varphi \epsilon [0,2\pi]$.

Для системы (7) при значениях параметра $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = \frac{p}{q}$ выполняется условие теоремы 1, следовательно, пара $\alpha_0 = 0$ и $\beta_0 = \frac{p}{q}$ образует точку бифуркации субгармонических колебаний периода $2\pi q$ системы (7). Пусть $\frac{p}{q} = \frac{1}{4}$. Применим теорему 2 для исследования устойчивости субгармонических колебаний периода 8π системы (7). Пусть $\varphi = 0$. Собственные значения матрицы V_2 получаются вида $6.2832 \pm 53.8372\mathrm{i}$, следовательно, периодические решения по направлению вектора $e(0)$ неустойчивы. Теперь исследуем устойчивость 8π-периодических решений при $\varphi = \frac{\pi}{8}$. В данном случае матрица V_2 имеет собственные значения -1.5708 $\pm$66.1332i, следовательно, периодические решения по направлению вектора $e\left(\frac{\pi}{8}\right)$ асимптотически устойчивы.

Литература

1. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
2. Острейковский В. А. Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф. М.: Высш. шк., 2005.
3. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
4. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1975, 740 с.
6. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем. М.: МЦНМО, 2005.
7. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях I, II. // Дифференц. уравн. 1987. Т. 23, Вып. 12. С. 2060–2067; 1988. Т. 24, Вып. 2. С. 226–233.
8. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: ’’Регулярная и хаотическая динамика’’, 2000.
9. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. -- М.: Наука, 1966, 332 с.
10. Юмагулов М. Г. Муртазина С. А. Исследование локальных бифуркаций вынужденных колебаний динамических систем.// Автоматика и телемеханика, 2012, №4, 83–98.
11. Юмагулов М. Г. Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем.// Уфимский математический журнал. 2013, №2, том 5.
12. Красносельский М. А., Юмагулов М. Г. Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений. // ДАН России. 1995, Т. 365, №2, С. 162–164.
13. Юмагулов М. Г. Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах. // Доклады Академии наук. 2009. Т. 424, №2. С. 177–180.
14. Ибрагимова Л. С, Юмагулов М. Г. Функционализация параметра и ее приложения в задаче о локальных бифуркациях динамических систем. // Автоматика и телемеханика. 2007. №4. С. 3–12.
15. Юмагулов М. Г., Вышинский А. А., Нуров И. Д., Муртазина С. А. Операторный метод исследования локальных бифуркаций многопараметрических динамических систем. // Вестник Санкт-Петербургского госуниверситета. Серия 10 (Прикладная математика, информатика, процессы управления). 2009, вып. 2, с. 146–155.

Статья рекомендована к печати кафедрой прикладной математики и информационных технологий Сибайского института (филиал) БашГУ (к.ф.-м.н., доцент кафедры О. Н. Беликова)

Scheme of research of stability of forced oscillations of systems with periodic coefficients in case of strong resonance

M. G. Yumagulov[1], S. A. Murtazina[2*]

[1]Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[2]Bashkir State University, Sibay Branch (Institute)
21 Belova Street, 453833 Sibay, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: sariamurtaz@mail.ru*

This article deals with the question of stability of periodic solutions of systems with periodic coefficients arising during bifurcation in the special case of strong resonance. New theorems on the stability of these solutions are obtained.

Keywords: dynamic systems, stability, bifurcation, subharmonic oscillations.