Признаки устойчивости бифуркационных периодических решений систем с периодическими коэффициентами

М. Г. Юмагулов[1], С. А. Муртазина[2*]

[1]Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

[2]Башкирский государственный университет, Сибайский институт (филиал)
Россия, Республика Башкортостан, 453833 г. Сибай, улица Белова, 21.

**Email: sariamurtaz@mail.ru*

В данной статье рассматривается двупараметрическая система с периодическими коэффициентами. Изучаются вопросы устойчивости периодических решений, возникающие при бифуркации. Приводятся новые признаки устойчивости в случаях сильного и слабого резонанса.

Ключевые слова: системы с периодическими коэффициентами, периодические решения, устойчивость, бифуркация, субгармонические колебания.

Рассматривается система дифференциальных уравнений с T-периодической правой частью, зависящая от двух скалярных параметров α, β

$$x' = A(t,\alpha,\beta)x + a(x,t,\alpha,\beta),\ x \in R^2, \tag{1}$$

где матрица $A(t,\alpha,\beta)$ и вектор-функция $a(x,t,\alpha,\beta)$ непрерывны по t и непрерывно дифференцируемы по x, α, β; нелинейность $a(x,t,\alpha,\beta)$ представима в виде

$$a(x,t,\alpha,\beta) = a_2(x,t,\alpha,\beta) + a_3(x,t,\alpha,\beta) + \widetilde{a_4}(x,t,\alpha,\beta), \tag{2}$$

где $a_2(x,t,\alpha,\beta)$ и $a_3(x,t,\alpha,\beta)$ содержат, соответственно, квадратичные и кубические по x слагаемые, а нелинейность $\widetilde{a_4}(x,t,\alpha,\beta)$ удовлетворяет соотношению $\|\widetilde{a_4}(x,t,\mu)\| = O\|x\|^4$ при $\|x\| \to 0$ равномерно по t, α, β; матрица $A(t,\alpha,\beta)$ имеет вид, часто встречающийся в приложениях

$$A(t,\alpha,\beta) = A_0 + (\alpha - \alpha_0)A_{11}(t) + (\beta - \beta_0)A_{12}(t) + A_2(t,\alpha,\beta), \tag{3}$$

где $A_2(t,\alpha,\beta)$ удовлетворяет соотношению вида $\max\limits_t \|A_2(t,\mu)\| = O(|\mu - \mu_0|^2)$ при $|\mu - \mu_0| \to 0$; здесь $\mu = (\alpha,\beta)$ и $|\mu| = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$; система (1) при любых значениях параметров α, β имеет нулевую точку равновесия $x = 0$.

Обозначим через $V(\alpha,\beta)$ матрицу монодромии линейной системы $x' = A(t,\alpha,\beta)x$, соответствующей (1).

Пусть α_0, β_0 некоторые значения параметров α, β. Рассмотрим следующий случай негиперболичности системы (1), когда матрица $V(\alpha_0,\beta_0)$ имеет пару простых собственных значений вида $e^{\pm 2\pi\theta i}$, $\theta \in (0, \frac{1}{2}]$, где А) θ иррационально; В) θ рационально: $\theta = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, $q \geq 5$; С) θ рационально: $\theta = \frac{p}{q}$ – несократимая дробь, $2 \leq q \leq 4$. В данном случае точку (α_0, β_0) принято называть точкой бифуркации.

В случае А в пространстве $R^3 = \{(t, x): t \in R^1, x \in R^2\}$ возникает инвариантная поверхность в виде "цилиндра", которая ограничивает точку равновесия $x = 0$. Поверхность "цилиндра" гладко зависит от α, β и она стягивается к нулевому решению $x = 0$ при $\alpha \to \alpha_0$ и $\beta \to \beta_0$. "Цилиндр" может быть как асимптотически устойчивым (т.е. притягивать решения, стартующие из некоторой окрестности данной поверхности) так и неустойчивым (т.е. отталкивать решения, стартующие из некоторой окрестности данной поверхности). В данном случае типичным является сценарий, при котором на поверхности "цилиндра" возникают квазипериодические решения системы (1). В случаях В и С основным сценарием является бифуркация субгармонических колебаний периода qT. На плоскости параметров (α, β) областью существования субгармонических колебаний являются множества, упирающиеся своим клювом в точку бифуркации (α_0, β_0) называемые языками Арнольда (см. [8]). Язык Арнольда представляет собой множество тех значений параметров (α, β), при которых система (1) имеет qТ-периодические решения, амплитуды которых стремятся к нулю при стремлении точки (α, β) к (α_0, β_0). В случае С язык Арнольда является достаточно широким, в случае В это множество чрезвычайно узкое, фактически вырождаются в кривую. В случае В аналогично случаю А в пространстве R^3 возникает поверхность в виде "цилиндра" и на ее поверхности при каждом (α, β) из соответствующего языка Арнольда возникает сразу два периодических решения с периодом qT. Здесь возможны две ситуации: 1) когда нулевое решение системы (1) неустойчиво, одна из периодических решений устойчива, а другая неустойчива, при этом "цилиндр" является асимптотически устойчивым; 2) когда нулевое решение асимптотически устойчиво, оба периодических решения неустойчивы, при этом "цилиндр" является неустойчивым. В случае С при $q = 2$ ($q = 3$) в системе (1) при каждом (α, β) из соответствующего языка Арнольда возникает ровно одно неустойчивое $2T$-периодическое ($3T$-периодическое) решение, причем нулевое решение при данном значении параметра может быть как асимптотически устойчивым, так и неустойчивым. При $q = 4$ ситуация более сложная. При некоторых значениях (α, β) из языка Арнольда возникает по одному $4T$-периодическому решению, при других сразу два $4T$-периодических решения. Причем решения, возникающие при значениях параметра из одного и того же языка Арнольда могут иметь разные свойства устойчивости. Отметим, что случай С обычно называется сильным резонансом, а случай В принято называть слабым резонансом.

Изучению систем вида (1), в случае, когда точка равновесия является негиперболической, посвящены многочисленные исследования (см., например, [1–9] и имеющуюся там библиографию). Основной интерес вызывают следующие вопросы: условия при которых возникают бифуркации, при каких значениях параметров возникают бифуркационные решения (постоянные, периодические и др. решения), условия устойчивости и т.п.

В данной статье рассматриваются вопросы устойчивости периодических решений системы (1), возникающих при бифуркации в случаях B и C ($q = 4$). Приводятся новые теоремы об устойчивости основанные на операторных методах исследования локальных бифуркаций ([10–15]).

Пусть для системы (1) выполнены условия B или C. Тогда матрица A_0 (а вместе с ней и транспонированная матрица A_0^*) имеет пару простых чисто мнимых собственных значений $\pm\frac{2\pi\theta i}{T}$. Обозначим через $e \pm ig$ и $e^* \pm ig^*$ соответствующие собственные векторы матриц A_0 и A_0^*.

Определим число $\chi = (x_1, e^*)(x_2, g^*) - (x_2, e^*)(x_1, g^*)$. Здесь $x_1 = \int_0^{qT}[A_0 x_{11}(t) + A_{11}(t)e_0(t)]dt, x_2 = \int_0^{qT}[A_0 x_{12}(t) + A_{12}(t)e_0(t)]\,dt$, где $e_0(t) = e^{A_0 t}e, x_{11}(t) = \int_0^t e^{A_0(t-s)}A_{11}(s)e_0(s)ds, x_{12}(t) = \int_0^t e^{A_0(t-s)}A_{12}(s)e_0(s)ds.$

Теорема 1. Пусть $\chi \neq 0$, тогда пара (α_0, β_0) является точкой бифуркации qT –периодических субгармонических колебаний системы (1). Существуют непрерывные функции $\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + O(\varepsilon), \beta(\varepsilon) = \beta_0 + O(\varepsilon)$ и $x(\varepsilon) = \varepsilon e + O(\varepsilon^2)$ такие, что система (1) при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ $и$ $\beta = \beta(\varepsilon)$ имеет qT-периодическое решение с начальным условием $x(0,\varepsilon) = x(\varepsilon)$. Здесь -малый вспомогательный параметр.

Значение (α_0, β_0) двумерного параметра (α, β) называют точкой бифуркации qT –периодических субгармонических колебаний системы (1), если каждому $\varepsilon > 0$ соответствует такие $\alpha = \alpha(\varepsilon)$, $\beta = \beta(\varepsilon)$ при которых система (1) имеет ненулевое qT-периодическое решение $x(t,\varepsilon)$, причем $\alpha(\varepsilon) \to \alpha_0, \beta(\varepsilon) \to \beta_0$ и $\max_t \|x(t,\varepsilon)\| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$.

Функции $\alpha(\varepsilon)$ и $\beta(\varepsilon)$ образуют кривую принадлежащую языку Арнольда. При каждом (α, β) из данной кривой возникает одно qT-периодическому решению, именно с начальной точкой $x(\varepsilon) = \varepsilon e\ + O(\varepsilon^2)$. Функции $\alpha(\varepsilon)$, $\beta(\varepsilon)$, $x(\varepsilon)$ вычисляются с использованием векторов $e, g,\ e^*, g^*$. Пары векторов e, g и e^*, g^* сохранением угла и нормы можно повернуть вокруг их начал на любой угол $\varphi \in [0,2\pi]$. Причем с каждым новым полученным набором векторов $e(\varphi), g(\varphi),\ e^*(\varphi), g^*(\varphi)$ условие теоремы 1 выполняется и следовательно при $\alpha = \alpha(\varepsilon,\varphi)$, $\beta = \beta(\varepsilon,\varphi)$ в системе (1) возникает семейство qT-периодических решений с начальной точкой $x(\varepsilon,\varphi) = \varepsilon e(\varphi)\ + O(\varepsilon^2)$. Соответствующее решение будем называть субгармоническим колебанием по направлению вектора $e(\varphi)$. Совокупность кривых $\alpha = \alpha(\varepsilon,\varphi)$, $\beta = \beta(\varepsilon,\varphi)$ при $\varphi \in [0,2\pi]$ и образует, язык Арнольда.

Критерии устойчивости будут приведены для периодических решений одного направления вектора $e(0)=e$. Обозначим $b_j=\int_0^{qT} e^{-A_0 t} a_j(e_0(t),t,\alpha_0,\beta_0)dt$, где $e_0(t)=e^{A_0 t}e$.

Определим числа α_j,β_j по формуле $\begin{pmatrix}\alpha_j\\ \beta_j\end{pmatrix}=-Q^{-1}\begin{pmatrix}(b_j,e^*)\\ (b_j,g^*)\end{pmatrix}$, где $Q=\begin{pmatrix}(x_1,e^*) & (x_2,e^*)\\ (x_1,g^*) & (x_2,g^*)\end{pmatrix}$.

Сначала приведем признаки устойчивости субгармонических колебаний системы (1) для случая слабого резонанса (B.) Определим матрицу

$$W_2=\int_0^{qT} e^{-A_0 s}\,[\alpha_2 A_{11}(s)+\beta_2 A_{12}(s)]e^{A_0 s}ds.$$

Теорема 2. Случай $q\geq 5$. Пусть вещественные части собственных значений матрицы W_2 отрицательны, тогда при всех малых значениях $\varepsilon>0$ семейство -периодических субгармонических колебаний $x(t,\varepsilon)$ системы (1) возникающие на кривой $\alpha=\alpha(\varepsilon),\beta=\beta(\varepsilon)$ стартующие из точек $x(\varepsilon)$ неустойчивы; второе семейство qT-периодических субгармонических колебаний системы (1) возникающие на той же кривой неустойчивы; нулевое решение системы (1) при тех же значениях параметра $\alpha=\alpha(\varepsilon),\beta=\beta(\varepsilon)$ асимптотически устойчиво. Пусть хотя бы одно собственное значение матрицы W_2 имеет положительную действительную часть, тогда при всех малых значениях $\varepsilon>0$ семейство q-периодических субгармонических колебаний $x(t,\varepsilon)$ системы (1) возникающие на кривой $\alpha=\alpha(\varepsilon),\beta=\beta(\varepsilon)$ стартующие из точек $x(\varepsilon)$ устойчивы; второе семейство qT-периодических субгармонических колебаний системы (1) возникающие на той же кривой неустойчивы; нулевое решение системы (1) при тех же значениях параметра $\alpha=\alpha(\varepsilon),\beta=\beta(\varepsilon)$ неустойчиво.

Приведем признаки устойчивости субгармонических колебаний системы (1) для случая сильного резонанса (C. ($q=4$)).

Определим матрицу $V_2=\int_0^{qT} e^{-A_0 s}\,P_2(s)e^{A_0 s}ds+\int_0^{qT} e^{-A_0 s}\,P_1(s)e^{A_0 s}\left[\int_0^{s} e^{-A_0\tau}\,P_1(\tau)e^{A_0\tau}d\tau\right]ds.$

где $P_1(t)=\alpha_1 A_{11}(t)+\beta_1 A_{12}(t)+a'_{2x}(e_0(t),t,\alpha_0,\beta_0)$,

$$P_2(t)=\alpha_2 A_{11}(t)+\beta_2 A_{12}(t)+a'_{3x}(e_0(t),t,\alpha_0,\beta_0)+a'_{2x}(e_1(t),t,\alpha_0,\beta_0).$$

Здесь $e_1(t)=e^{A_0 t}\int_0^{t} e^{-A_0\tau}\,a_2(e_0(\tau),\tau,\alpha_0,\beta_0)d\tau$.

Теорема 3. Случай $q=4$. Пусть вещественные части собственных значений матрицы V_2 отрицательны, тогда при всех малых значениях $\varepsilon>0$ семейство qT-периодических субгармонических колебаний $x(t,\varepsilon)$ системы (1) возникающие на кривой $\alpha=\alpha(\varepsilon),\beta=\beta(\varepsilon)$ стартующие из точки $x(\varepsilon)$ асимптотически устойчивы; пусть хотя бы одно собственное значение матрицы V_2 имеет положительную действительную часть, тогда эти решения неустойчивы.

Доказательство теоремы 2. Ограничимся приведением доказательства теоремы 2. Значения параметров, при которых возникают субгармонические колебания $x(t,\varepsilon)$ периода qT по направлению вектора e системы (1) определяются по формулам [10]

$$\alpha(\varepsilon) = \alpha_0 + \varepsilon\alpha_1 + \varepsilon^2\alpha_2 + o(\varepsilon^2), \beta(\varepsilon) = \beta_0 + \varepsilon\beta_1 + \varepsilon^2\beta_2 + o(\varepsilon^2), \quad (4)$$

где

$$\alpha_1 = J_\alpha(b_2),\ \beta_1 = J_\beta(b_2),\ \alpha_2 = J_\alpha(\psi + b_3),\ \beta_2 = J_\beta(\psi + b_3), \quad (5)$$

$$b_j = \int_0^{qT} e^{-A_0 t} a_j(e_0(t), t, \mu_0)dt\ (j = 2,3),$$

$$\psi = \alpha_1[z'_\alpha(qT,\alpha,\beta_0)]_{\alpha=\alpha_0} + \beta_1\big[z'_\beta(qT,\alpha_0,\beta)\big]_{\beta=\beta_0} + b'_{2x}(e_0)e_1 +$$

$$+\frac{\alpha_1^2}{2}[x''_{\alpha\alpha}(qT,\alpha,\beta_0)]_{\alpha=\alpha_0} + \alpha_1\beta_1[x''_{\alpha\beta}(qT,\alpha,\beta)]_{\substack{\alpha=\alpha_0\\ \beta=\beta_0}} + \frac{\beta_1^2}{2}[x''_{\beta\beta}(qT,\alpha_0,\beta)]_{\beta=\beta_0}.$$

Здесь $\big[J_\alpha(y), J_\beta(y)\big] = -Q^{-1}[(y,e^*),(y,g^*)]$; $x(t,\alpha,\beta) = X(t,\alpha,\beta)e, z(t,\alpha,\beta) = X(t,\alpha,\beta)e_1$, где $X(t,\alpha,\beta)$ – фундаментальная матрица решений линейной системы $x' = A(t,\alpha,\beta)x$; $e_1 = \alpha_1 e + \beta_1 g, e_0(t) = e^{A_0 t}e$.

Сами субгармонические колебания представимы в виде

$$x(t,\varepsilon) = \varepsilon e_0(t) + \varepsilon^2 e_1(t) + o(\varepsilon^2), \quad (6)$$

где $e_1(t)$ решение задачи Коши $\begin{cases} x' = A_0x + [\alpha_1 A_{11}(t) + \beta_1 A_{12}(t)]e_0(t) + a_2(e_0(t),t,\alpha_0,\beta_0) \\ x(0) = e_1 \end{cases}$.

Свойства устойчивости субгармонических колебаний $x(t,\varepsilon)$ системы (1) возникающих при $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$ равносильны свойству устойчивости нулевого решения $x = 0$ системы

$$x' = [A(t,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon)) + a'_x(x(t,\varepsilon),t,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon))]x, \quad (7)$$

где $a'_x(x(t,\varepsilon),t,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon))$ – матрица Якоби вектор-функции $a(x,t,\alpha(\varepsilon),\beta(\varepsilon))$ вычисленная при $x = x(t,\varepsilon)$. Систему (11) с учетом (2), (3), (4), (6) можно представить в виде

$$x' = [A_0 + \varepsilon P_1(t) + \varepsilon^2 P_2(t)]x + A_3(t,\varepsilon)x, \quad (8)$$

где

$$P_1(t) = \alpha_1 A_{11}(t) + \beta_1 A_{12}(t) + a'_{2x}(e_0(t),t,\alpha_0,\beta_0),$$

$$P_2(t) = \alpha_2 A_{11}(t) + \beta_2 A_{12}(t) + a'_{3x}(e_0(t),t,\alpha_0,\beta_0) + a'_{2x}(e_1(t),t,\alpha_0,\beta_0) +$$

$$+\frac{\alpha_1^2}{2}A''_{2\alpha\alpha}(t,\alpha_0,\beta_0) + \alpha_1\beta_1 A''_{2\alpha\beta}(t,\alpha_0,\beta_0) + \frac{\beta_1^2}{2}A''_{2\beta\beta}(t,\alpha_0,\beta_0),$$

$A_3(t,\varepsilon)$ – qT-периодическая матрица, удовлетворяющая оценке

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\max_{0\le t\le qT}\frac{\|A_3(t,\varepsilon)\|}{\varepsilon^2}=0.$$

Обозначим через $V(\varepsilon)$ матрицу монодромии линейной системы (8). Здесь $V(\varepsilon) = \mathrm{X}(qT,\varepsilon)$, где $\mathrm{X}(t,\varepsilon)$ – фундаментальная матрица решений системы (8). Матрица $V(\varepsilon)$ представима в виде

$$V(\varepsilon)=V_0+\varepsilon V_1+\varepsilon^2 V_2+V_3(\varepsilon),$$

где $V_0=V(0)=e^{A_0qT}$, $V_1=V'(0)$, $V_2=\frac{1}{2}V''(0)$, а $V_3(\varepsilon)=O(\varepsilon^2)$ при $\varepsilon\to 0$.

С учетом того, что матрица $\mathrm{X}(t,\varepsilon)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$\mathrm{X}(t,\varepsilon)=e^{A_0t}\mathrm{I}+\int_0^t e^{A_0(t-s)}\,[\varepsilon P_1(s)+\varepsilon^2P_2(s)+A_3(s,\varepsilon)]\mathrm{X}(s,\varepsilon)ds,$$

получим

$$V_1=\int_0^{qT}e^{-A_0s}\,P_1(s)e^{A_0s}ds,$$

$$V_2=\int_0^{qT}e^{-A_0s}\,P_2(s)e^{A_0s}ds+\int_0^{qT}e^{-A_0s}\,P_1(s)e^{A_0s}\Big[\int_0^s e^{-A_0\tau}\,P_1(\tau)e^{A_0\tau}d\tau\Big]ds.$$

Матрица V_0 имеет полупростое собственное значение 1 кратности 2. Поэтому характер устойчивости нулевого решения $x=0$ системы (8), что равносильно, характер устойчивости семейства qT-периодических решений $x(t,\varepsilon)$ системы (1) определяется собственными значениями матрицы V_1, если данная матрица ненулевая. Если V_1 нулевая, устойчивость будет определяться собственными значениями матрицы V_2.

По условию теоремы $q=4$, где q – число из условия C. В данном случае матрица V_1 нулевая. Покажем это. Несложно доказать, что матрица $\int_0^{qT}e^{-A_0s}\,a'_{2x}(e_0(s),s,\alpha_0,\beta_0)e^{A_0s}ds$, содержащаяся в составе матрицы V_1 нулевая. Теперь покажем, что числа α_1, β_1 при $q=4$ нулевые.

Задача о бифуркации субгармонических колебаний системы (1) равносильна задаче о бифуркации q-циклов дискретной динамической системы

$$x_{n+1}=V(\alpha,\beta)x+v(x,\alpha,\beta), n=0,1,2,\dots, \qquad (9)$$

где $x_n\in R^2, V(\alpha,\beta)x+v(x,\alpha,\beta)\colon R^2\to R^2$ – оператор сдвига по траекториям системы (1) за время от 0 до T [5]. Здесь $V(\alpha,\beta)$ – матрица монодромии линейной системы $x'=A(t,\alpha,\beta)x$, а $v(x,\alpha,\beta)$ равномерно по x удовлетворяет соотношению $\|v(x,\alpha,\beta)\|=O(\|x\|^2)$ при $\|x\|\to 0$. Если система (1) при $\alpha=\alpha(\varepsilon)$ и $\beta=\beta(\varepsilon)$ имеет qT-периодическое решение, удовлетворяющее начальному условию $[x(t,\varepsilon)]_{t=0}=x(\varepsilon)$, то уравнение (9) при тех же значениях параметра имеет имеет q-цикл стартующий из точки $x(\varepsilon)$. Верно и обратное, если уравнение (9) имеет q-цикл стартующий из точки $x(\varepsilon)$, то система (1) имеет qT-периодическое решение удовлетворяющее начальному условию $[x(t,\varepsilon)]_{t=0} = x(\varepsilon)$. Причем для периодического решения $x(t,\varepsilon)$ и цикла верны соотношения

$$x(0,\varepsilon) = x(\varepsilon), x(T,\varepsilon) = x_1(\varepsilon), x(2T,\varepsilon) = x_2(\varepsilon), \dots, x\big((q-1)T,\varepsilon\big) = x_{q-1}(\varepsilon), x(qT,\varepsilon) = x(\varepsilon)\,.$$

Поэтому бифуркация субгармонических колебаний периода qT системы (1) трансформируется в бифуркацию q-циклов дискретной динамической системы (9) с теми же качественными характеристиками. В частности и субгармонические колебания системы (1) и бифуркационные q-циклы системы (9) происходят при одних и тех же значениях параметров $\alpha = \alpha(\varepsilon)$ и $\beta = \beta(\varepsilon)$. Для дискретной динамической системы специального вида, которому сводится системы (1) доказано (см. работу [11]), что числа α_1, β_1 и вектор ψ в формулах (4), (5) нулевые при $q = 4$. Теорема доказана.

Литература

1. Арнольд В. И. Геометрические методы в теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Ижевск: ''Регулярная и хаотическая динамика'', 2000.
2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей. Москва-Ижевск: Ин-т компьют. исслед., 2002.
3. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. – М.: Мир, 1975, 740 с.
4. Каток А. Б., Хасселблат Б. Введение в теорию динамических систем. М.: МЦНМО, 2005.
5. Красносельский М. А. Оператор сдвига по траекториям дифференциальных уравнений. -- М.: Наука, 1966, 332 с.
6. Нейштадт А. И. О затягивании потери устойчивости при динамических бифуркациях I, II. // Дифференц. уравн. 1987. Т. 23, Вып. 12. С. 2060–2067; 1988. Т. 24, Вып. 2. С. 226–233.
7. Острейковский В. А. Анализ устойчивости и управляемости динамических систем методами теории катастроф. М.: Высш. шк., 2005.
8. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 1. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004.
9. Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л. Методы качественной теории в нелинейной динамике. Ч. 2. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2009.
10. Юмагулов М. Г. Муртазина С. А. Исследование локальных бифуркаций вынужденных колебаний динамических систем.// Автоматика и телемеханика, 2012, №4, 83–98.
11. Юмагулов М. Г. Локализация языков Арнольда дискретных динамических систем.// Уфимский математический журнал. 2013, №2, том 5.
12. Красносельский М. А., Юмагулов М. Г. Метод функционализации параметра в проблеме собственных значений. // ДАН России. 1995, Т. 365, №2, С. 162–164.
13. Юмагулов М. Г. Операторный метод исследования правильной бифуркации в многопараметрических системах. // Доклады Академии наук. 2009. Т. 424, №2. С. 177–180.

14. Ибрагимова Л. С, Юмагулов М. Г. Функционализация параметра и ее приложения в задаче о локальных бифуркациях динамических систем. // Автоматика и телемеханика. 2007. №4. С. 3–12.

15. Юмагулов М. Г., Вышинский А. А., Нуров И. Д., Муртазина С. А. Операторный метод исследования локальных бифуркаций многопараметрических динамических систем. // Вестник Санкт-Петербургского госуниверситета. Серия 10 (Прикладная математика, информатика, процессы управления). 2009, вып. 2, с. 146–155.

Статья рекомендована к печати кафедрой прикладной математики и информационных технологий Сибайского института (филиал) БашГУ (зав. кафедрой И. С. Гумеров)

Signs of stability of bifurcation periodic solutions of systems with periodic coefficients

M. G. Yumagulov[1], S. A. Murtazina[2*]

[1]Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450074 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

[2]Bashkir State University, Sibay Branch (Institute)
21 Belova Street, 453833 Sibay, Republic of Bashkortostan, Russia.

**Email: sariamurtaz@mail.ru*

This article discusses a two-parameter system with periodic coefficients. The problems of stability of periodic solutions arising from bifurcation are studied. New signs of stability are given in cases of strong and weak resonance.

Keywords: systems with periodic coefficients, periodic solutions, stability, bifurcation, subharmonic oscillations.