DOI: 10.33184/dokbsu-2020.2.1

О логарифмических плотностях положительной последовательности

А. Ф. Кужаев

Башкирский государственный университет
Россия, Республика Башкортостан, 450076 г. Уфа, улица Заки Валиди, 32.

Уфимский государственный нефтяной технический университет
Россия, Республика Башкортостан, 450062 г. Уфа, улица Космонавтов, 1.

Email: arsenkuzh@outlook.com

Известно, что оценки на рост целых функций экспоненциального типа тесно связаны с числовыми характеристиками последовательности нулей этих функций, в частности, с их различными плотностями. Поэтому исследование взаимосвязей между плотностями представляет собой отдельный интерес. В настоящей работе главным образом исследуется взаимосвязь верхней и нижней логарифмической плотности с плотностями, ранее рассматриваемыми автором в предыдущих работах (нижняя, верхняя, нижняя и верхняя логарифмическая блок-плотность).

Ключевые слова: логарифмическая плотность, логарифмическая блок-плотность, верхняя плотность, нижняя плотность.

Будем рассматривать неубывающую и неограниченную последовательность положительных чисел:

$$\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}, \lambda_k < \lambda_{k+1}, \lambda_k > 0, k \in \mathbb{N}, n_k \in \mathbb{N}.$$

Натуральные числа n_k обозначают кратности чисел λ_k.

Сумму обратных величин к числам λ_k, попавшим в круг $B(0,r) = \{|z| \leq r\}$ с учетом их кратностей, будем обозначать символом $\lambda(r)$, то есть

$$\lambda(r) = \sum_{\lambda_k \leq r} \frac{n_k}{\lambda_k},$$

Величины, определяемые равенствами

$$\overline{DL}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\lambda(r)}{\ln r}, \underline{DL}(\Lambda) = \underline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\lambda(r)}{\ln r},$$

называются верхней и нижней логарифмической плотностью соответственно. Если же $\overline{DL}(\Lambda) = \underline{DL}(\Lambda)$, то их общее значение будем обозначать $DL(\Lambda)$ и называть просто логарифмической плотностью. Данная характеристика последовательности Λ используется, например, в работах [1, 2] с целью получения подходящих оценок на аналитические функции, которые обращаются в нуль на последовательности Λ.

Так же нам понадобятся верхняя и нижняя плотности последовательности Λ. Они соответственно определяются следующими равенствами:

$$\overline{n}(\Lambda) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r}, \underline{n}(\Lambda) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{n(r,\Lambda)}{r},$$

где $n(t,\Lambda)$ обозначает считающую функцию последовательности Λ, то есть количество (опять же, с учетом кратностей) ее точек, содержащихся в круге $B(0,r)$:

$$n(r,\Lambda) = \sum_{\lambda_k \le r} n_k.$$

В работе [3] исследовалась взаимосвязь между различными плотностями последовательности Λ: между верхней, нижней, а так же между логарифмическими блок-плотностями (верхней и нижней) и величиной, тесно с ними связанной, и определяемой равенством

$$L(\Lambda,\delta) = \lim_{r\to\infty} \frac{\lambda(r) - \lambda\big(r(1-\delta)\big)}{-\ln(1-\delta)}, \delta \in (0;1).$$

Если указанный предел не существует, то рассматривают нижний и верхний пределы от того же выражения,

$$\overline{L}(\Lambda,\delta) = \varlimsup_{r\to\infty} \frac{\lambda(r) - \lambda\big(r(1-\delta)\big)}{-\ln(1-\delta)}, \underline{L}(\Lambda,\delta) = \varliminf_{r\to\infty} \frac{\lambda(r) - \lambda\big(r(1-\delta)\big)}{-\ln(1-\delta)},$$

и тогда верхняя и нижняя логарифмическая блок-плотности соответственно связаны с ними следующим образом:

$$\overline{L}(\Lambda) = \lim_{\delta\to 1-0} \overline{L}(\Lambda,\delta), \underline{L}(\Lambda) = \lim_{\delta\to 1-0} \underline{L}(\Lambda,\delta).$$

Данные величины определены корректно (пределы по $\delta \to 1-0$ существуют), более подробную информацию о других соотношениях для этих величин и взаимосвязями между ними см., например, [3, 4].

Все приводимые ниже оценки справедливы, если потребовать конечность верхней плотности последовательности Λ. В силу теоремы Линделефа (см., например, [5]) это требование не является обременительным, поскольку это одно из необходимых условий для того, чтобы рассматриваемая последовательность была подпоследовательностью нулей некоторой целой функции экспоненциального типа.

Имеет место

Утверждение 1. *Справедливы неравенства*

$$\overline{DL}(\Lambda) \le \overline{n}(\Lambda), \underline{DL}(\Lambda) \ge \underline{n}(\Lambda).$$

Доказательство. Поскольку $\lambda_k > 0$ для любого $k \in \mathbb{N}$, и последовательность Λ неограниченна, то существует, быть может, лишь конечное число членов λ_k, для которых $\lambda_k \le 1$. Их можно отбросить, поскольку изменение в конечном числе членов последовательности Λ не влияет на величину любой из ее плотностей, поэтому без ограничения общности можно считать, что $n(1, \Lambda) = 0$.

По определению верхней и нижней плотностей, для любого $\varepsilon > 0$ найдутся числа $r_1(\varepsilon)$ и $r_2(\varepsilon)$ такие, что

$$\frac{n(r,\Lambda)}{r} \le \overline{n}(\Lambda) + \varepsilon, r \ge r_1(\varepsilon),$$

$$\frac{n(r,\Lambda)}{r} \ge \underline{n}(\Lambda) - \varepsilon, r \ge r_2(\varepsilon).$$

Тогда, используя методы работ [3, 4], будем иметь

$$\sum_{\lambda_k \le r} \frac{n_k}{\lambda_k} = \int_1^r \frac{dn(t,\Lambda)}{t} = \frac{n(r,\Lambda)}{r} + \int_1^r \frac{n(t,\Lambda)dt}{t^2} <$$

$$< \frac{n(r,\Lambda)}{r} + (\overline{n}(\Lambda) + \varepsilon) \int_1^r \frac{dt}{t} < (\overline{n}(\Lambda) + \varepsilon)(1 + \ln r),$$

откуда следует, что

$$\overline{DL}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\lambda(r)}{\ln r} \le \overline{n}(\Lambda).$$

Совершенно аналогично получим, что

$$\sum_{\lambda_k \le r} \frac{n_k}{\lambda_k} \ge \left(\underline{n}(\Lambda) - \varepsilon\right)(1 + \ln r),$$

следовательно,

$$\underline{DL}(\Lambda) \ge \underline{n}(\Lambda).$$

Утверждение 1 доказано.

Следующее утверждение можно считать аналогом леммы 1 работы [6]. Поэтому метод, используемый при доказательстве утверждения 2, почти дословно повторяет ход доказательства леммы 1 из [6] с некоторыми изменениями.

Утверждение 2. *Справедливы неравенства*

$$\overline{\boldsymbol{DL}}(\boldsymbol{\Lambda}) \le \overline{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{\Lambda}), \underline{\boldsymbol{DL}}(\boldsymbol{\Lambda}) \ge \underline{\boldsymbol{L}}(\boldsymbol{\Lambda}).$$

Доказательство. Докажем лишь неравенство для верхней логарифмической плотности; для нижней требуемое неравенство получается полностью аналогично.

Пусть $\delta \in (0;1)$ и $\overline{L}(\Lambda,\delta) < \infty$. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Согласно определению величины $\overline{L}(\Lambda,\delta)$ выберем $r_0 > 0$ такое, что

$$\frac{\lambda(r) - \lambda\big(r(1-\delta)\big)}{-\ln(1-\delta)} \le \overline{L}(\Lambda,\delta) + \varepsilon, r \ge r_0.$$

Пусть $r > r_0$ и $p(r)$; максимальное число, для которого выполнено неравенство $r_0/(1-\delta)^{p(r)} \ge r$. Тогда $r \ge r_0/(1-\delta)^{p(r)-1}$, и полагая $r_m = \frac{r_0}{(1-\delta)^m}, m = \overline{0,p(r)}$, с учетом (), получаем:

$$\overline{DL}(\Lambda) = \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\lambda(r)}{\ln r} \le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\lambda\left(\frac{r_0}{(1-\delta)^{p(r)}}\right)}{\ln r} =$$

$$= \overline{\lim_{r\to\infty}} \sum_{m=0}^{p(r)} \left(\frac{\lambda\left(\frac{r_0}{(1-\delta)^m}\right) - \lambda\left(\frac{r_0}{(1-\delta)^{m-1}}\right)}{\ln r} + \frac{\lambda\big((1-\delta)r_0\big)}{\ln r} \right) =$$

$$= (-\ln(1-\delta)) \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{1}{\ln r} \sum_{m=0}^{p(r)} \frac{\lambda(r_m) - \lambda\big(r_m(1-\delta)\big)}{-\ln(1-\delta)} \le$$

$$\le \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{-\ln(1-\delta)}{\ln r_0 - p(r)\ln(1-\delta)} \sum_{m=0}^{p(r)} \frac{\lambda(r_m) - \lambda\big(r_m(1-\delta)\big)}{-\ln(1-\delta)} \le$$

$$\le \left(\overline{L}(\Lambda,\delta) + \varepsilon\right) \overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{(-\ln(1-\delta))(p(r)+1)}{\ln r_0 - p(r)\ln(1-\delta)} = \overline{L}(\Lambda,\delta) + \varepsilon.$$

Таким образом, показали, что для любого $\delta \in (0;1)$, для любого $\varepsilon > 0$ выполнено неравенство

$$\overline{DL}(\Lambda) \le \overline{L}(\Lambda,\delta) + \varepsilon.$$

Переходя здесь к пределу по $\delta \to 1-0$ и пользуясь произвольностью ε, получаем, что

$$\overline{DL}(\Lambda) \le \overline{L}(\Lambda),$$

что и требовалось. Утверждение 2 доказано.

Отметим в заключение, что, с учетом результатов работы [3], имеет место следующая цепочка неравенств

$$\underline{n}(\Lambda) \leq \underline{L}(\Lambda) \leq \underline{DL}(\Lambda) \leq \overline{DL}(\Lambda) \leq \overline{L}(\Lambda) \leq \overline{n}(\Lambda).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 18-11-00002).

Литература

1. E. Zikkos, The closed span of some exponential system in weighted Banach spaces on the real line and a moment problem // Analysis Mathematica. 2018. V. 44. P. 605–630.
2. E. Zikkos, Completeness of an exponential system in weighted Banach spaces and closure of its linear span // J. Approx. Theory. 2007. V. 146. No 1. P. 115–148.
3. A. F. Kuzhaev, On the necessary and sufficient conditions for the measurability of a positive sequence // Issues of Analysis. 2019. V. 8 (26). No 3. P. 63–72.
4. A. S. Krivosheyev, A. F. Kuzhaev, On one Leontiev-Levin theorem // Ufa Mathematical Journal. 2017. V. 7. No 2. P. 87–99.
5. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. М.: Гостехиздат, 1956. С. 632.
6. A. I. Abdulnagimov, A. S. Krivosheyev, Properly distributed subsequence on the line // Ufa Mathematical Journal. 2015. V. 7. No 1. P. 3–12.

Статья рекомендована к печати кафедрой математического анализа Башкирского государственного университета (д-р. ф-м.н., доц. О. А. Кривошеева)

On logarithmic densities of a positive sequence

A. F. Kuzhaev

Bashkir State University
32 Zaki Validi Street, 450076 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Ufa State Petroleum Technological University
1 Kosmonavtov Street, 450062 Ufa, Republic of Bashkortostan, Russia.

Email: arsenkuzh@outlook.com

It is known that estimates for the growth of exponential type entire functions are closely related to the numerical characteristics of the sequence of zeros of these functions, in particular, with their different densities. Therefore, the study of relationships between densities is of particular interest. This paper mainly examines the relationship of the upper and lower logarithmic density with the densities previously considered by the author in previous works (lower, upper, lower and upper logarithmic block density).

Keywords: logarithmic density, logarithmic block density, upper density, lower density.